Institut des Sciences

Appliquées et Économiques

ISAE – Cnam Liban

Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Date: 14 juillet 2009 –Durée:3h00

1ère session – 2nd semestre

2008 – 2009

Sujet coordonné par: ***Ibrahim Ismail.***

Proposé pour les centres d'enseignement de: Beyrouth – Baalbek – Ghazza – Tripoli – Bickfaya

Langue de l'examen : Français

Calculatrice non programmable autorisée. Documents non autorisés.

Examen Final :

Applications de l'analyse à la géométrie, initiation à l'algèbre linéaire – MVA 006

Consignes particulières aux candidats : *Le sujet comporte 2 pages. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en considération. La rigueur et la clarté de votre rédaction entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.*

Exercice 1: (4 points)

Soit f la fonction de deux variables réelles définie par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^4}{x^2+y^4} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

1-Montrer que f est continue en (0,0). *indication : on pourra poser $X=x,\ Y=y^2$ puis passer aux coordonnées polaires.*

2-Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, puis $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pout tout $(x,y)\neq(0,0)$.

3-Etudier la continuité des dérivées partielles premières de f en (0,0).

Exercice 2: (4 pts)

Soit f la fonction de deux variables réelles définie par $f(x,y)=x^3+y^3+3(x^2-y^2)$.

1-Etudier les points critiques (stationnaires) de la fonction f.

2-En calculant $f(h,h)$ montrer que la fonction f n'admet pas d'extrémum en (0,0).

3-Terminer alors l'étude des extrémums locaux de f.

Exercice 3: (4 pts)

Soit Γ la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est donnée par $\rho(\theta)=\sin(\dfrac{\theta}{3})$.

1-Calculer $\rho(\theta+3\pi)$. En déduire que pour obtenir entièrement Γ il suffit de l'étudier pour $\theta\in[0,\dfrac{3\pi}{2}]$, puis d'effectuer une symétrie que l'on précisera.

2-Etudier et tracer entièrement la courbe Γ. On précisera les tangentes à Γ en $\theta=0$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, $\theta=\pi$ et $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$

Exercice 4: (5 pts)

Soit (C) la courbe paramétrée par $\begin{cases}x(t)=t^2+\dfrac{2}{t}\\ y(t)=t+\dfrac{1}{t}\end{cases}$ où le paramètre t varie dans $]0,+\infty[$

1-Etudier les branches infinies de (C).

2-Etudier les variations des fonctions $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ sur $]0,+\infty[$.

3-Montrer que la courbe (C) admet un unique point singulier dont on précisera la nature. Préciser la tangente en ce point.

4-Dessiner (C)

Exercice 5: (4 pts)

On considère la région suivante : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le y,\ \frac{1}{4} \le x^2 + y^2 \le 1\}$

1-Dessiner D.

2-Calculer les intégrales doubles suivantes: $I = \iint_D x\,dxdy$, $J = \iint_D y\,dxdy$

3-En déduire les coordonnées du centre de gravité de la région D considérée comme une plaque homogène.

Exercice 6: (3 pts)

En utilisant le changement de variables suivant : $u = \frac{x^2}{y},\ v = \frac{y^2}{x}$, montrer que l'aire de la région D définie par

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le \frac{x^2}{y} \le 4,\ 1 \le \frac{y^2}{x} \le 2\}$ vaut 1.

Exercice 7: (4 pts)

Soit (S) un solide homogène de masse volumique 1, occupant le domaine $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le \frac{1}{2},\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$

En utilisant les coordonnées sphériques, déterminer le volume de (S) puis son moment d'inertie par rapport à l'origine O.

Exercice 8: (4 pts)

Considérons l'intégrale curviligne suivante : $I = \oint_\Gamma -y^3dx + x^3dy$ où Γ est un cercle de centre O et de rayon $R > 0$.

1-Calculer I en utilisant une représentation paramétrique de Γ.

2-Recalculer I en utilisant le théorème de Green-Riemann.

Exercice 9: (8 pts)

On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^2 \end{pmatrix}$ où m est un paramètre réel.

1-Calculer le déterminant de A.

2-En discutant suivant les valeurs de m, étudier le rang de la matrice A.

3-Pour quelles valeurs de m les vecteurs $(1, m, m), (-m, -m^2, 1)$ et $(m^2, m, -m^2)$ sont-ils linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$?

4-On pose $m = 2$ pour toute la suite de l'exercice.

4-1) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

4-2) Expliquer pourquoi on ne peut pas trouver une matrice X telle que $X.A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4-3) Peut-on trouver une matrice X telle que $A.X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$? Si oui déterminer X.